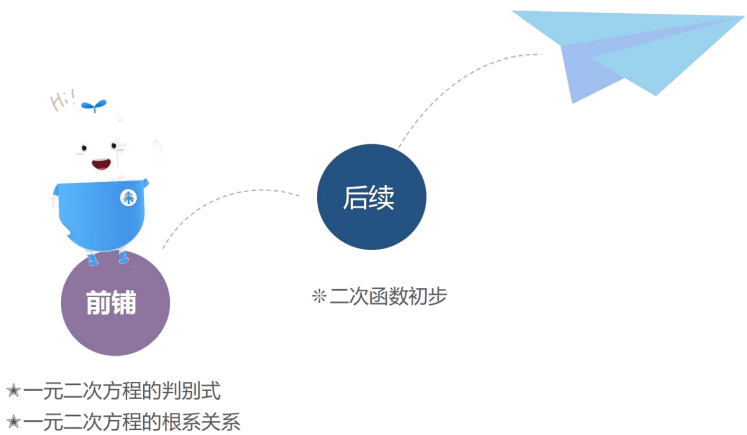
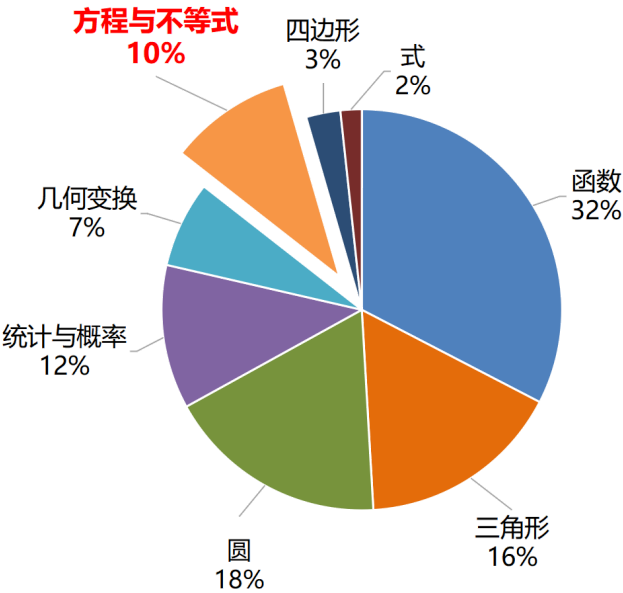


第2讲 一元二次方程的判别式和根系关系

知己知彼



一、一元二次方程的判别式

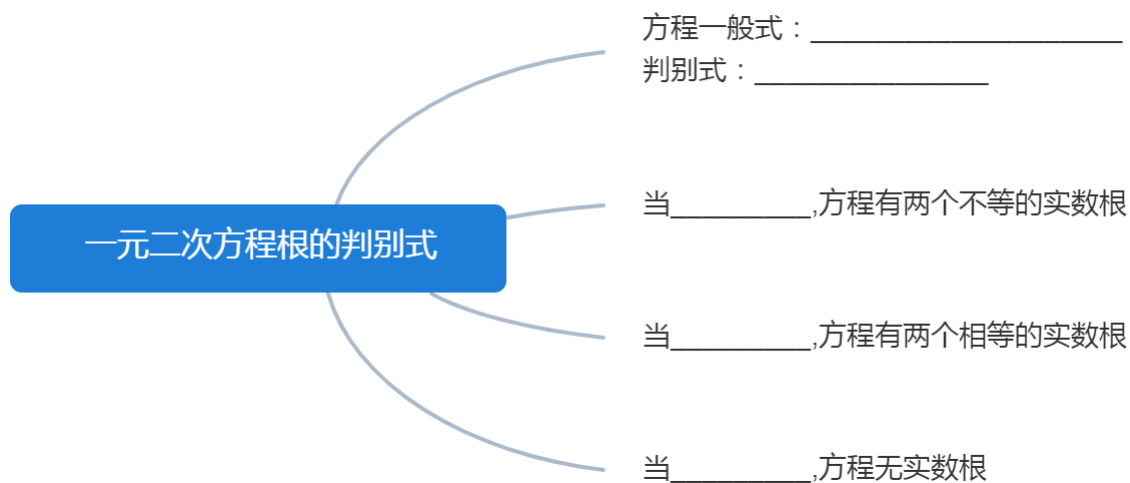
【教法指导】

本讲重难点是韦达定理的应用，授课过程首先学生要了解韦达定理的内容，根据定理内容解决简单的两根之和和两根之积的问题，对于程度好的学生还需要扩展较复杂的韦达定理的应用。

【名词解释】

韦达定理：韦达定理指的就是一元二次方程中根与系数的关系。

🔗 根的判别式基本概念



【结论】

① 方程有实根 $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$,

特别地，当 $\Delta = 0$ 时， $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ 。

② 当 a 、 c 异号时，方程有两个不等的实数根。

|| 例题

1. 已知一元二次方程 $x^2 + x - 1 = 0$ ，下列判断正确的是（ ）。

- A. 该方程有两个相等的实数根
- B. 该方程有两个不相等的实数根
- C. 该方程无实数根
- D. 该方程根的情况不确定

【答案】B

【解析】已知一元二次方程 $x^2 + x - 1 = 0$ ， $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ ，
 $\therefore$ 该方程有两个不相等的实数根。

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

2. 不解方程，判断一元二次方程根的情况： $x^2 - 4x - 3 = 0$.

【答案】 方程有两个不等的实数根 .

【解析】 $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-3) = 28$,

$\therefore$ 方程有两个不等的实数根 .

【标注】 【知识点】一元二次方程根的判别式

3. 方程 $(2x + 1)(x - 2) = 1$ 的解的情况是 () .

A. 有两个不相等的实数根

B. 没有实数根

C. 有两个相等的实数根

D. 有一个实数根

【答案】 A

【解析】 方程即 $2x^2 - 3x - 3 = 0$, $b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 2 \times (-3) = 9 + 24 > 0$,

$\therefore$ 该方程有两个不相等的实根 .

【标注】 【知识点】一元二次方程根的判别式

练习

4. 方程 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 的根的情况是 () .

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 有一个实数根

【答案】 C

【解析】 $\because a = 1$, $b = -2$, $c = 3$,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 < 0$,

$\therefore$ 方程没有实数根 .

故选：C .

【标注】 【知识点】一元二次方程根的判别式

5. 计算一元二次方程的判别式： $-3x^2 + 6x + \frac{2}{5} = 0$, 则 $\Delta =$ _____ .

【答案】 $\frac{204}{5}$ 或 40.8 或 $40\frac{4}{5}$

【解析】 $a = -3, b = 6, c = \frac{2}{5}$,

根的判别式

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 + 3 \times 4 \times \frac{2}{5} = \frac{204}{5}.$$

故答案为 $\frac{204}{5}$.

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

6. 不解方程，判断一元二次方程根的情况： $16x^2 + 9 = 24x$.

【答案】有两个相等的实数根.

【解析】 $\Delta = (-24)^2 - 4 \times 16 \times 9 = 0$,

$\therefore$ 有两个相等的实数根.

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式



根的判别式与参数结合



例题

【教法指导】

因为如果，说明二次项系数为0，也就是说二次项不存在，那就不是一元二次方程了.

7. 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + x - 1 = 0$ 有实数根，则 a 的取值范围是().

A. $a > -\frac{1}{4}$

B. $a \geq -\frac{1}{4}$

C. $a \geq -\frac{1}{4}$ 且 $a \neq 0$

D. $a > -\frac{1}{4}$ 且 $a \neq 0$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 方程 $ax^2 + x - 1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，

$\therefore a \neq 0$.

$\because$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + x - 1 = 0$ 有实数根，

$$\therefore \Delta = 1 + 4a \geq 0,$$

$$\text{解得 } a \geq -\frac{1}{4}.$$

$$\therefore a \geq -\frac{1}{4} \text{ 且 } a \neq 0.$$

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

8. 已知关于 x 的方程 $ax^2 + 2x - 2 = 0$ 有实数根，则实数 a 的取值范围是() .

- A. $a \geq -\frac{1}{2}$ B. $a \leq -\frac{1}{2}$ C. $a \geq -\frac{1}{2}$ 且 $a \neq 0$ D. $a > -\frac{1}{2}$ 且 $a \neq 0$

【答案】 A

【解析】 当 $a \neq 0$ 时，是一元二次方程，

$\therefore$ 原方程有实数根，

$$\therefore \Delta = 2^2 - 4a \times (-2) = 4(1 + 2a) \geq 0,$$

$$\therefore a \geq -\frac{1}{2},$$

当 $a = 0$ 时， $2x - 2 = 0$ 是一元一次方程，有实数根 .

故选：A .

【标注】 【知识点】 由一元二次方程根的情况确定参数

重点注意

- 1、题目条件是“方程”还是“一元二次方程”
- 2、是否有实数根
- 3、实数根个数（相等还是不相等）

练习

9. 如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 3x - 1 = 0$ 有两个不相等的实根，那么 k 的取值范围是 _____ .

【答案】 $k > -\frac{9}{4}$ 且 $k \neq 0$

【解析】 $\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 3x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore k \neq 0 \text{ 且 } \Delta > 0, \text{ 即 } (-3)^2 - 4 \times k \times (-1) > 0,$$

$$\text{解得：} k > -\frac{9}{4} \text{ 且 } k \neq 0.$$

【标注】 【知识点】 由一元二次方程根的情况确定参数

【试题来源】

2017年南开区三模第14题

10. 已知关于 x 的方程 $kx^2 - (2k + 1)x + k - 2 = 0$.

(1) 若方程有两个相等的实数根，则 k _____ ；

- (2) 若方程有两个不相等的实数根, 则 k _____ ;
- (3) 若方程有实数根, 则 k _____ ;
- (4) 若方程没有实数根, 则 k _____ .

【答案】 (1) $= -\frac{1}{12}$
 (2) $> -\frac{1}{12}$ 且 $k \neq 0$
 (3) $\geq -\frac{1}{12}$
 (4) $< -\frac{1}{12}$

【解析】 (1) 由题得 $a = k$, $b = -(2k + 1)$, $c = k - 2$.

$\because$ 方程有两个相等的实数根,

$\therefore$ 此方程一定为一元二次方程且 $b^2 - 4ac = 0$,

$$\therefore b^2 - 4ac = [-(2k + 1)]^2 - 4k \times (k - 2)$$

$$= 12k + 1 = 0.$$

$$\therefore k = -\frac{1}{12}.$$

(2) $\because$ 方程有两个不相等的实数根,

$\therefore$ 此方程一定为一元二次方程, 则 $k \neq 0$.

$$\text{且 } b^2 - 4ac > 0.$$

$$\therefore b^2 - 4ac = 12k + 1 > 0,$$

$$\therefore k > -\frac{1}{12},$$

$$\therefore k > -\frac{1}{12} \text{ 且 } k \neq 0.$$

(3) ①当 $k = 0$ 时, 方程一元二次方程.

$$-x - 2 = 0$$

$$x = -2.$$

此时方程有实数根.

②当 $k \neq 0$ 时, 方程为一元二次方程.

若方程有实数根,

$$\text{则 } b^2 - 4ac = 12k + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow k \geq -\frac{1}{12}.$$

$$\text{综上所述 } k \geq -\frac{1}{12}.$$

(4) $\because$ 方程没有实数根,

$$\therefore b^2 - 4ac = 12k + 1 < 0$$

$$\Rightarrow k < -\frac{1}{12}.$$

$$\therefore k < -\frac{1}{12}.$$

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

11. 已知关于 x 的方程 $(k-1)x^2 - (k-1)x + \frac{1}{4} = 0$ 有两个相等的实数根，求 k 的值。

【答案】 $k = 2$ 。

【解析】 $\because$ 关于 x 的方程 $(k-1)x^2 - (k-1)x + \frac{1}{4} = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = 0,$$

$$\therefore [-(k-1)]^2 - 4(k-1) \times \frac{1}{4} = 0,$$

$$\text{整理得, } k^2 - 3k + 2 = 0,$$

$$\text{即}(k-1)(k-2) = 0,$$

解得： $k = 1$ （不符合一元二次方程定义，舍去）或 $k = 2$ 。

$$\therefore k = 2.$$

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

【试题来源】

18年-19年10月和平区九十中学初三上月考第20题

二、一元二次方程的根系关系

一元二次方程的根系关系

一元二次方程根系关系
 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$)

利用公式法求解两根， $x_1 =$ _____ ; $x_2 =$ _____

两根之和 $x_1 + x_2 = ($ _____ $) + ($ _____ $) = ($ _____ $)$

两根之积 $x_1 x_2 = ($ _____ $) \cdot ($ _____ $) = ($ _____ $)$

知识回顾

在实数范围内，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)的根由其系数 a 、 b 、 c 确定，它的根的情况（是否有实数根）由 _____ 确定。

设一元二次方程为 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)，其根的判别式为： _____

- ① $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ _____ 实数根 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- ② $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ _____ 实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- ③ $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ _____ 实数根 .

根与系数关系常见应用场景：

1. 不解方程，求与方程的根有关的代数式的值；
2. 已知方程的一个根，求方程的另一个根；
3. 与根的判别式相结合，解决一些综合题 .

|| 例题

12. 已知 m, n 是方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个实数根，则 $m - mn + n =$ _____ .

【答案】 3

【解析】 根据题意得 $m + n = -2, mn = -5$,
所以 $m + n - mn = -2 - (-5) = 3$.
故答案为 3 .

【标注】 【知识点】一元二次方程根与系数的关系

13. 方程 $2x^2 + 4x + 1 = 0$ 的解为 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 =$ _____ ; $x_1x_2 =$ _____ .

【答案】 $-2; \frac{1}{2}$ 或 0.5

【解析】 根据题意得： $x_1 + x_2 = -\frac{4}{2} = -2$,
 $x_1x_2 = \frac{1}{2}$.
故答案为 $-2, \frac{1}{2}$.

【标注】 【知识点】一元二次方程根与系数的关系

注意： 此处二次项系数为 2，计算时要强调

14. 已知 m, n 是方程 $x^2 + 2x - 2019 = 0$ 的两个根，则代数式 $m^2 + 3m + n$ 的值为 _____ .

【答案】 2017

【解析】 $\because m, n$ 是方程 $x^2 + 2x - 2019 = 0$ 的两个根，

$$\therefore m^2 + 2m = 2019, m + n = -2,$$

$$\therefore m^2 + 3m + n$$

$$= m^2 + 2m + (m + n)$$

$$= 2019 - 2$$

$$= 2017.$$

故答案为：2017.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

15. 方程 $2x^2 + 3x - 1 = 0$ 的两个根为 x_1 、 x_2 ，则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值等于 _____.

【答案】 3

【解析】 根据题意得 $x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}$ ， $x_1 x_2 = -\frac{1}{2}$ ，
 $\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = 3.$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

几个重要变形

$$\textcircled{1} x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2;$$

$$\textcircled{2} (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2;$$

$$\textcircled{3} |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2};$$

$$\textcircled{4} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}.$$

练习

16. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x - 4 = 0$ 的两根为 x_1 ， x_2 ，则 $2x_1 + 2x_2 + x_1 x_2 =$ _____.

【答案】 -10

【解析】 由已知 $x_1 + x_2 = -3$ ， $x_1 \cdot x_2 = -4$ ，
 所以原式 = -10.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

17.

设 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 + 4x - 3 = 0$ 的两根, 且 $2x_1(x_2^2 + 5x_2 - 3) + a = 2$, 则 $a =$ _____.

【答案】 8

【解析】 根据题意得 $x_1 + x_2 = -4, x_1x_2 = -3$,
所以原式化简得 $-6(x_1 + x_2) + 10x_1x_2 + a = 2$,
代入可得 $a = 8$.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

【试题来源】

18-19学年10月北辰区北仓第二中学月考第16题

18. 若 α, β 是方程 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 的两个实数根, 则 $\alpha^2 + \beta^2$ 的值为().

A. 10

B. 9

C. 8

D. 7

【答案】 C

【解析】 根据题意得 $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -2$,
所以 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2 \times (-2) = 8$.
故选C.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

【试题来源】

19-20学年天津市东丽中学初三上学期期中第6题



根与系数的应用



例题

19. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + 2m = 0$ 有一个根为 -1 , 则另一个根为().

A. 5

B. -3

C. -5

D. 4

【答案】 A

【解析】 设方程的另一个根为 α , 则 $-1 + \alpha = 4$,
解得 $\alpha = 5$,

故选：A.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

20. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + kx + 4k^2 - 3 = 0$ 的两个实数根分别是 x_1, x_2 ，且满足

$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$ ，则 k 的值为（ ）.

A. -1 或 $\frac{3}{4}$

B. -1

C. $\frac{3}{4}$

D. 不存在

【答案】C

【解析】由根与系数的关系，得 $x_1 + x_2 = -k$ ，

因为 $x_1 x_2 = 4k^2 - 3$ ，

又 $x_1 + x_2 = x_1 x_2$ ，

所以 $-k = 4k^2 - 3$ ，即 $4k^2 + k - 3 = 0$ ，

解得 $k = \frac{3}{4}$ 或 -1 ，

因为 $\Delta \geq 0$ 时，所以 $k^2 - 4(4k^2 - 3) \geq 0$ ，

解得： $-\frac{2\sqrt{5}}{5} \leq k \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，故 $k = -1$ 舍去，

$\therefore k = \frac{3}{4}$ 。

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

【易错题】

此题为易错题，需要重点将关系式列出后，求解出对应的 k 值，同时注意有两个实数根时， k 的取值范围

|| 练习

21. 已知 $x = -1$ 是方程 $x^2 + mx - 5 = 0$ 的一个根，方程的另一根为 _____。

【答案】5

【解析】由题意得： $(-1)^2 + (-1) \times m - 5 = 0$ ，

解得 $m = -4$ ；

由 $x_1 \cdot x_2 = -5$ 。

所以方程的另一根 $x_2 = 5$ 。

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

22. 已知方程 $2x^2 + kx - 4 = 0$ 的一个根为4, 则另一根为 _____, $k =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{2}; -7$

【解析】 设方程的另一根为 α , 则由根与系数的关系得到: $4\alpha = -2$,

$$\text{解得 } \alpha = -\frac{1}{2}.$$

把 $x = 4$ 代入方程 $2x^2 + kx - 4 = 0$, 得

$$2 \times 4^2 + 4k - 4 = 0,$$

解得 $k = -7$.

故答案为 $-\frac{1}{2}; -7$.

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

23. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x + m - 1 = 0$ 的两个实数根为 x_1 、 x_2 .

(1) 求 m 的取值范围.

(2) 若 $2(x_1 + x_2) + x_1x_2 + 10 = 0$, 求 m 的值.

【答案】 (1) $m \leq \frac{13}{4}$.

(2) $m = -3$.

【解析】 (1) $\because$ 方程 $x^2 + 3x + m - 1 = 0$ 有两个实数根,

$$\therefore \Delta \geq 0,$$

$$\text{即 } 3^2 - 4 \times 1 \times (m - 1) \geq 0,$$

$$\text{解得: } m \leq \frac{13}{4}.$$

(2) 由根与系数的关系得:

$$x_1 + x_2 = -3, x_1x_2 = m - 1,$$

$$\therefore 2(x_1 + x_2) + x_1x_2 + 10 = 0,$$

$$\therefore 2 \times (-3) + m - 1 + 10 = 0,$$

$$\text{解得: } m = -3.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

【试题来源】

17-18学年10月天津河东区第八中学初三月考第21题

24.

已知关于 x 的方程 $k^2x^2 - (2k - 1)x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，那么使该方程的两个实数根互为相反数的 k 的值是（ ）。

A. 不存在

B. 1

C. -1

D. $\frac{1}{2}$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 关于 x 的方程 $k^2x^2 - (2k - 1)x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = (2k - 1)^2 - 4k^2 > 0 \\ k^2 \neq 0 \end{cases},$$

$$\text{解得：} k < \frac{1}{4} \text{ 且 } k \neq 0,$$

根据一元二次方程根与系数的关系，

$$\text{有 } x_1 + x_2 = -\frac{-(2k - 1)}{k^2} = 0, \text{ 即 } k = \frac{1}{2};$$

但当 $k = \frac{1}{2}$ 时， $\Delta < 0$ ，方程无实数根，

$\therefore$ 不存在实数 k ，使方程两根互为相反数。

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

25. 设关于 x 的方程 $2x^2 + kx + 2 = 0$ 的两根分别为 α 、 β ，且 $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ，则 k 等于（ ）。

A. 2

B. -4

C. 4

D. -2

【答案】 B

【解析】 $2x^2 + kx + 2 = 0$,

$$\alpha + \beta = -\frac{k}{2},$$

$$\alpha\beta = \frac{2}{2} = 1,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\beta},$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta},$$

$$\frac{k^2}{4} - 2 = -\frac{k}{2},$$

$$k^2 + 2k - 8 = 0,$$

$$k_1 = 2, k_2 = -4,$$

$$\Delta = k^2 - 4 \times 2 \times 2 \geq 0,$$

$$k^2 \geq 16,$$

$$k = -4.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

【试题来源】

16-17学年天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初三上期末试卷第1题

知识点总结

当 $\Delta \geq 0$ ，即方程有实数根，由 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 可知，

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a},$$
$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{c}{a}.$$

因此，方程的两个根 x_1 ， x_2 和系数 a ， b ， c 有如下关系：

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

韦达定理：任何一个一元二次方程的根与系数的关系为：两个根的和等于一次项系数与二次项系数的比的相反数，两个根的积等于常数项与二次项系数的比。